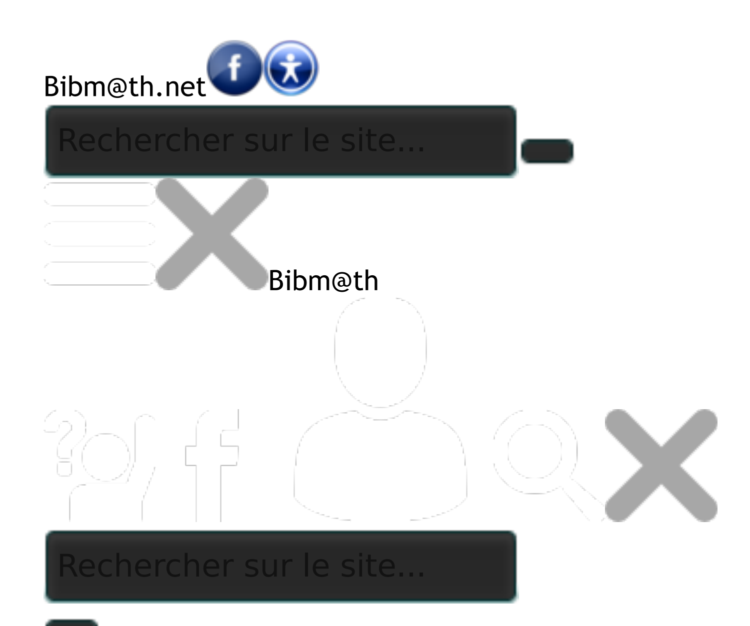


Accueil Ressources Bibliothèques Références Thèmes Forum
Bibliothèque d'exercices Bibliothèque de problèmes

Accueil

Ressources
Collège
Math Sup
Math Spé
Capes
Agreg interne
BTS

Bibliothèques
Bibliothèque d'exercices
Bibliothèque de problèmes

Références
Dictionnaire
Biographie de mathématiciens
Formulaire
Lexique français/anglais

Thèmes
Cryptographie et codes secrets
Jeux et énigmes
Carrés magiques
Mathématiques au quotidien
Dossiers

Forum

Ressources mathématiques > Base de données d'exercices > Exercices de dénombrement - probabilités - statistiques >
Accéder à mon compte > Accéder à ma feuille d'exercices >

Exercices corrigés - Dénombrement

Dénombrements théoriques

Exercice 1 - Parties disjointes [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soit X une partie à p éléments de E. Combien y-a-t-il de parties Y de E disjointes de X?
2. Combien y-a-t-il de couples (X,Y) formés de parties disjointes de E?

Indication

Corrigé

1. Y est une partie quelconque de $E\backslash X$ qui compte $n-p$ éléments. Il y a donc 2^{n-p} choix pour Y.
2. On choisit d'abord p le nombre d'éléments de X. Ce nombre étant fixé, il y a $\binom{n}{p}$ choix pour X. X étant fixé, il y a 2^{n-p} choix pour Y d'après la question précédente. Le nombre recherché est donc

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p}=(1+2)^n=3^n.$$

Exercice 2 - Inclusion [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble à n éléments; Combien y-a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que $X\subset Y$?

Indication

Corrigé

Pour p parcourant $0,\dots,n$, il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles pour Y une partie de E à p éléments. Y étant fixé, X est une partie quelconque de Y, qui compte p éléments, il y a donc 2^p choix pour X. Le nombre recherché est donc égal à

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{p}=(1+2)^n=3^n.$$

Exercice 3 - Parties de cardinal pair [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble fini de cardinal $n\geq 1$. Démontrer que le nombre de parties de E de cardinal pair vaut 2^{n-1}.

Indication

Corrigé

On commence par remarquer que, si on a prouvé que le nombre de parties de cardinal pair d'un ensemble à n élément est 2^{n-1}, alors le nombre de parties du même ensemble qui sont de cardinal impair vaut également 2^{n-1}. En effet, le nombre total de parties, qui vaut 2^n, est la somme du nombre de parties de cardinal pair et du nombre de parties de cardinal impair.
Démontrons maintenant le résultat. On procède par récurrence sur n. Si $n=1$, la seule partie de E de cardinal pair est $\varnothing$. On a bien $1=2^0$. Supposons maintenant le résultat démontré au rang n, et prouvons-le au rang $n+1$. Soit donc E de cardinal $n+1$, et écrivons $E=\{a\}\cup F$ où F est de cardinal n. Alors une partie de E de cardinal pair

- ou bien contient a, et on doit alors la compléter avec une partie de cardinal impair de F. Il y a 2^{n-1} telles parties.
- ou bien ne contient pas a, et c'est également une partie de cardinal pair de F. Il y a là aussi exactement 2^{n-1} telles parties.

Finalement, on trouve que le nombre de parties de E de cardinal pair vaut $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n=2^{(n+1)-1}$. L'hypothèse de récurrence est donc prouvée au rang $n+1$.

Exercice 4 ★★★ - Partition d'un ensemble [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Combien existe-t-il de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p?

Indication

Corrigé

Pour fabriquer une telle partition, on peut partir d'une liste ordonnée des np éléments, et les grouper ensuite p par p. Il y a $(np)!$ façons d'écrire ces listes ordonnées, mais plusieurs listes peuvent donner la même partition. D'abord, sur chaque groupe de p éléments qu'on a choisi, on peut opérer une permutation qui ne changera par la partition obtenue. Pour chaque groupe, il y a $p!$ telles permutations, et comme il y a n groupes de p éléments, on obtient finalement $(p!)^n$ telles permutations. Ensuite, on peut également permuter tous ces groupes les uns avec les autres. Il y a $n!$ telles permutations de ces groupes. Finalement, on trouve que le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties de cardinal p est $\dfrac{(np)!}{(p!)^n n!}$.

Exercice 5 ★★★ - Dérangement et problème des rencontres [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle \emph{dérangement} de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E? En déduire D_1.
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E? En déduire D_2.
3. On suppose n quelconque, et on écrit $E=\{a_1,\dots,a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations? En déduire la formule suivante :

$$n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k.$$

4. En déduire D_3, D_4, D_5.
5. Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. A l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes , on numérote les femmes de 1 à 5 , et les hommes de 1 à 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste , chaque homme choisissant au hasard une femme pour partenaire.
   a. A chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y-a-t-il d'associations possibles?
   b. Donner la probabilité pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué.
   c. Déterminer la probabilité pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué.
   d. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes.

Indication ▶

Corrigé ▼

1. Il n'y a qu'une seule permutation de E qui est l'identité. Ce n'est pas un dérangement, $D_1 = 0$.
2. Des deux permutations de E, seule celle qui inverse les deux éléments est un dérangement : $D_2 = 1$.
3. Il y a $\binom{n}{k}$ choix de k éléments invariants parmi n. Une fois ces choix fixés, la permutation est un dérangement sur les $n-k$ autres éléments. Il y a donc $\binom{n}{k}D_{n-k}$ telles permutations. On adopte pour que cette formule soit aussi vraie si $k=n$ la convention $D_0 = 1$. On sépare ensuite les permutations de E en fonction de leur nombre de points invariants. Comme les ensembles que l'on obtient sont disjoints, et qu'il y a en tout $n!$ permutations de E, on obtient :

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}.$$

Pour obtenir la formule demandée, il faut ensuite faire le changement d'indices $l = n-k$, et utiliser la propriété des coefficients binômiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. On applique la relation pour $n=3$. On obtient :

$$3! = D_0 + 3D_1 + 3D_2 + D_3 \implies D_3 = 2.$$

De même, en appliquant la relation pour $n=4$, on trouve $D_4 = 9$, et pour $n=5$, $D_5 = 44$.
5.
   a. Une telle association correspond à une permutation de $\{1,\dots,5\}$. Il y a $5! = 120$ telles permutations.
   b. Si aucun couple légitime n'est reconstitué, c'est que la permutation précédente est un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ telles associations, et la probabilité recherchée est $44/120 = 11/30$.
   c. Si un seul couple légitime est reconstitué, il y a 5 choix pour le couple. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5\times D_4 = 45$ telles possibilités. La probabilité recherchée est $45/120 = 3/8$.
   d. On compte aussi le cas où deux couples légitimes sont reconstitués : il y a $\binom{5}{2} = 10$ choix de 2 couples parmi 5. Pour les autres, il faut une association qui soit un dérangement : $10\times D_3 = 20$. Le nombre d'associations où il y a plus de couples illégitimes que de couples légitimes est donc : $20+45+44 = 109$, ce qui donne une probabilité de 109/120>1/2. Le bal masqué favorise les rencontres!

Exercice 6 ★★★★ - Partie sans entiers consécutifs [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé ▼

Soit $n\geq 1$ et $p\geq 0$ des entiers. On note F_n^p l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$ à p éléments ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs. On note K_n^p le cardinal de F_n^p.

1. Déterminer K_n^p quand $p > (n+1)/2$.
2. Soit $\{a_1,\dots,a_p\}$ une partie de F_n^p écrite de sorte que $a_i < a_{i+1}$. On pose $b_k = a_k + 1 - k$. Prouver que $1\leq b_1 < b_2 < \dots < b_p \leq n+1-p$.
3. Soit G_n^p l'ensemble des parties à p éléments de $\{1,\dots,n+1-p\}$. Construire une bijection de F_n^p sur G_n^p.
4. En déduire la valeur de K_n^p.
5. Application : au loto on tire 6 numéros dans $\{1,\dots,49\}$. Combien de tirages ne contiennent aucune paire d'entiers consécutifs?

Indication ▶

Corrigé ▼

1. Soit $A = \{a_1,\dots,a_p\}$ une partie de $\{1,\dots,n\}$ à p éléments ne contenant pas deux entiers consécutifs, avec

$a_1 < a_2 < \dots < a_p$. Alors on a $a_{i+1} - a_i \geq 2$, et donc, par récurrence, $a_p \geq a_1 + 2p - 2 \geq 2p - 1$. Mais on a aussi $a_p \leq n$. Ainsi, il est impossible de trouver une telle partie dès que $2p - 1 > n$, c'est-à-dire dès que $2p > n + 1$. Ainsi, dans ce cas, $K_n^p = 0$.

2. Puisque $a_{i+1} - a_i \geq 2$, on a $b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1 \geq 1$ et donc $b_{i+1} > b_i$. On a clairement $b_1 \geq 1$ et $b_p = a_p - p + 1 \leq n + 1 - p$.

3. L'application est donnée par la question précédente. A tout élément $\{a_1, \dots, a_p\}$ de F_n^p, où les a_i sont en ordre croissant, on associe la partie $\{b_1, \dots, b_p\}$ où $b_k = a_k + 1 - k$. D'après la question précédente, ceci définit bien une partie à p éléments de $\{1, \dots, n + 1 - p\}$, donc un élément de G_n^p. Reste à prouver qu'il s'agit d'une bijection. C'est clairement une injection, car si deux éléments $\{a_1, \dots, a_p\}$ et $\{a_1', \dots, a_p'\}$ ont la même image $\{b_1, \dots, b_p\}$, alors pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on a $a_k + 1 - k = a_k' + 1 - k$ et donc $a_k = a_k'$. De plus, c'est une bijection. Si $\{b_1, \dots, b_p\}$ est un élément de G_n^p, on définit $a_1, \dots, a_p$ en posant $a_k = b_k + k - 1$. Alors on vérifie facilement, comme à la question précédente (mais en échangeant les rôles de a_k et b_k), que $\{a_1, \dots, a_p\}$ est élément de F_n^p.

4. Puisque F_n^p et G_n^p sont en bijection, ils ont le même cardinal. Mais le cardinal de G_n^p est connu, et c'est $\binom{n+1-p}{p}$. C'est aussi la valeur de K_n^p.

5. Le nombre de tirages recherché est K_{49}^6, qui vaut $\binom{44}{6}$.

Exercice 7 ★★★★ - Nombre de partitions d'un ensemble à n éléments [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Soit n et k deux entiers strictement positifs.

1. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en k parties. Dans la suite, on notera $S(n, k)$ le nombre de ces partitions. On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.
2. Que vaut $S(n, k)$ pour $k > n$?
3. Que vaut $S(n, 1)$?
4. Démontrer que $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$.
5. Rédiger une fonction récursive Python permettant de calculer $S(n, k)$.

Indication

Corrigé

1. Notons $E_n = \{1, \dots, n\}$. Il y a exactement 2^n parties de E_n. Il y a moins de partitions de E_n en k parties que de choix de k éléments de $\mathcal{P}(E_n)$. Donc le nombre de partitions de E_n en k parties est inférieur ou égal à $\binom{2^n}{k}$. En particulier, il est fini.

2. Il n'existe pas de partitions de $\{1, \dots, n\}$ en k parties avec $k > n$. Donc $S(n, k) = 0$.

3. Il existe une seule partition de $\{1, \dots, n\}$ en une partie (l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ lui-même). Et donc $S(n, 1) = 1$.

4. On va séparer les partitions de $\{1, \dots, n\}$ en k parties en deux ensembles disjoints :

- ou bien la partition comprend le singleton $\{n\}$. On complète alors cette partition en prenant une partition de $\{1, \dots, n - 1\}$ en $k - 1$ parties : il y a $S(n - 1, k - 1)$ telles partitions.
- ou bien la partition ne comprend pas le singleton $\{n\}$. Pour construire une telle partition, il faut et il suffit de considérer une partition de $\{1, \dots, n - 1\}$ en k parties, et d'ajouter $\{n\}$ à une de ces parties : il y a $S(n - 1, k)$ partitions, et k choix pour ajouter $\{n\}$ à une de ces parties. Finalement, il a $S(n - 1, k - 1) \times k$ telles partitions.

On en déduit que

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k).$$

5.

```
def partition(n,k):
```

```
    if ( (k==0) and (n==0)):
        return 1
    if (k==0):
        return 0
    if (n==0):
        return 0
    return partition(n-1,k-1)+k*partition(n-1,k)
```

Exercice 8 ★★★★★ **- Nombre de surjections** [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

On se propose de calculer le nombre $S(n,p)$ de surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$, où $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

1. Des cas particuliers :
   - **1.1.** Calculer $S(n,p)$ pour $p>n$.
   - **1.2.** Calculer $S(n,n)$.
   - **1.3.** Calculer $S(n,1)$.
   - **1.4.** Calculer $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Démontrer que, pour tout $n>1$ et tout $p>1$, on a la relation
$$S(n,p)=p\big(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\big).$$
4. En déduire un algorithme pour calculer $S(n,p)$.
5. Démontrer que $S(n,p)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$.

Indication

Corrigé

1.
   - **1.1.** Si $p>n$, il n'y a pas de surjection de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. On a donc $S(n,p)=0$.
   - **1.2.** Lorsque $p=n$, les surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\}$ sont les bijections de $\{1,\dots,n\}$ sur lui-même. Il y en a donc $n!=S(n,n)$.
   - **1.3.** Lorsque $p=1$, toute application de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1\}$ est une surjection. Mais il y a une seule application de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1\}$. On a donc $S(n,1)=1$.
   - **1.4.** Lorsque $p=2$, il y a deux applications qui ne sont pas surjectives : celle qui envoie tous les éléments sur 1 et celle qui envoie tous les éléments sur 2. De plus, il y a 2^n applications de $\{1,\dots,n\}$ dans $\{1,2\}$. On en déduit que $S(n,2)=2^n-2$.
2. Lorsque l'on étudie les surjections de $\{1,\dots,n+1\}$ dans $\{1,\dots,n\}$, un unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents, et tous les autres en ont un seul. On peut donc caractériser une surjection par le choix de cet élément et de ses deux antécédents, puis par une bijection entre les $n-1$ autres éléments. On a donc
$$S(n+1,n)=n\times\binom{n+1}{2}\times(n-1)!=\frac{n(n+1)!}{2}.$$
3. Soit s une surjection de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. Il y a p façons de choisir la valeur de $s(n)$. Une fois cette valeur choisie, notons s' la restriction de s à $\{1,\dots,n-1\}$. Remarquons que tous les éléments de $\{1,\dots,p\}\backslash\{i\}$ sont atteints par s'. On distingue alors deux cas :
   - Soit i est atteint par s', et alors s' est une surjection de $\{1,\dots,n-1\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. Il y a $S(n-1,p)$ possibilités;
   - Soit i n'est pas atteint par s', et s' est une surjection de $\{1,\dots,n-1\}$ sur $\{1,\dots,p\}\backslash\{i\}$. Il y a $S(n-1,p-1)$ possibilités.

   Finalement, on obtient que
$$S(n,p)=p\big(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\big).$$
4. On programme la fonction suivante S, d'arguments n et p deux entiers naturels non nuls.

```
Fonction S(n,p)
```

```
Si p>n, retourner 0.
Si p=1, retourner 1.
Sinon, retourner p(S(n-1,p-1)+S(n-1,p))
```

Seriez-vous capables de prouver que cet algorithme se termine quelles que soient les entrées n et p?

5. On va prouver ce résultat par récurrence sur n. Si $n=1$, le résultat est clair si $p=1$; si $p>1$, alors $S(1,p)=0$ qui est bien égal à

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k=\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}p\binom{p-1}{k-1}=-p(1-1)^{p-1}=0$$

où on a utilisé

$$p\binom{p-1}{k-1}=k\binom{p}{k}.$$

Supposons le résultat prouvé au rang $n-1$, et prouvons-le au rang n. Si $p=1$, à nouveau l'égalité est évidente. On peut donc supposer $p>1$ et on écrit

$$\begin{aligned}S(n,p)&=p\big(S(n-1,p)+S(n-1,p-1)\big)\\&=p\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}\binom{p-1}{k}k^{n-1}+\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^{n-1}\right)\\&=p\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}k^{n-1}\left(\binom{p}{k}-\binom{p-1}{k}\right)+k^{n-1}\right)\end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule du triangle de Pascal et il vient :

$$S(n,p)=p\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}k^{n-1}\binom{p-1}{k-1}+k^{n-1}\right)=\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}p\binom{p-1}{k-1}k^{n-1}.$$

On obtient le résultat voulu en remarquant à nouveau que

$$p\binom{p-1}{k-1}=k\binom{p}{k}.$$

Exercice 9 ★★★★ - Combinaisons avec répétitions [Signaler une erreur] [Ajouter à ma feuille d'exos]

Enoncé

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$, on note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}^n$ tels que $x_1+\dots+x_n=p$.

1. Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_1^p et Γ_2^p.
2. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $p\in\mathbb{N}$,
$$\Gamma_{n+1}^p=\Gamma_n^0+\Gamma_n^1+\dots+\Gamma_n^p.$$
3. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $p\in\mathbb{N}$,
$$\Gamma_n^p=\binom{n+p-1}{p}.$$

Indication

Corrigé

1. On a $\Gamma_n^0=1$ (tous les x_i doivent être égaux à 0), $\Gamma_n^1=n$ (un des x_i doit être égal à 1, les autres sont égaux

à 0, il faut choisir ce x_i). On a aussi $\Gamma_1^p = 1$ (x_1 doit être égal à p), et $\Gamma_2^p = p + 1$ (x_1 peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et p, et le choix de x_1 détermine complètement la valeur de x_2).

Étudions maintenant la valeur de Γ_n^2. Pour que $x_1 + \cdots + x_n = 2$, il y a deux choix possibles :

- ou bien un seul des x_i est non-nul; il est forcément égal à 2, et on a n choix pour cet élément;
- ou bien deux des x_i sont non-nuls; ils sont alors forcément égaux à 1, et il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ tels choix d'éléments. Finalement,

$$\Gamma_n^2 = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Le nombre de $n+1$-uplets $(x_1, \dots, x_{n+1})$ tels que $x_1 + \cdots + x_{n+1} = p$ et $x_{n+1} = k$ vaut exactement Γ_n^{p-k}, le nombre de n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p - k$. On somme pour toutes les valeurs de k possibles, c'est-à-dire que 0 à p. On a donc

$$\Gamma_n^{p-0} + \dots + \Gamma_n^{p-p} = \Gamma_{n+1}^p$$

ce qui est bien le résultat voulu.

3. On va procéder par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 1$ d'après la première question. Supposons le résultat prouvé au rang n et prouvons-le au rang $n+1$. On a

$$\Gamma_{n+1}^p = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n+p-1}{p}.$$

Il s'agit donc de prouver que

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}.$$

Cette formule se prouve par application successives de la formule du triangle de Pascal. Plus précisément, on peut la démontrer par récurrence sur p. Si $p = 0$ ou 1, elle est vraie. Si elle est vraie jusqu'au rang $p - 1$, alors

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n+p-2}{p-1} + \binom{n+p-1}{p} &= \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p-1}{p} \\ &= \binom{n+p}{p}.\end{aligned}$$

Discussions des forums

Résolubilité d'une équati ...
Peut-on m'expliquer certa ...
crible en python
Comment calculer l'angle ...
démonstration: condition ...
Solution généralisée des ...
Cryptographie
Fonctions dérivées
série entière
l'arithémtique de Peano s ...
*Dm de maths 1*S fonctions*
Exercice 1 S
equation de la physique m ...
Aide pour chiffrage avec ...
problème 4eme nombre divisible
Accéder aux forums

Mathématicien du mois



Ernesto Cesàro (1859-1906)

Toutes les biographies